工程测量中两条直线交点坐标的计算

宁 瑜,王丽莉
(兰州城市建设学校 成教部,甘肃 兰州 730046)

摘 要:在工程测量及设计工作中,以往计算两条直线交点坐标的方法,需要列出两条直线的数学方程式,或者求出直线的斜率,才能应用相应公式计算出两条直线交点的坐标,计算比较复杂,某些情况下还会出现数学错误而得不出结果。本研究推导出了直接利用直线上点的坐标数据计算两条直线交点坐标的通用公式,可以用来计算任意两条相交直线交点的坐标。

关键词:工程测量;直线;交点坐标
中图分类号:P23

1 工程测量及设计中的常用算法

在工程测量及设计工作中,常需要计算两条直线交点的坐标,如图 1 所示。以往常用两种方式计算。

第一种方式是用代数方法进行计算,需要列出两条直线的数学方程式:

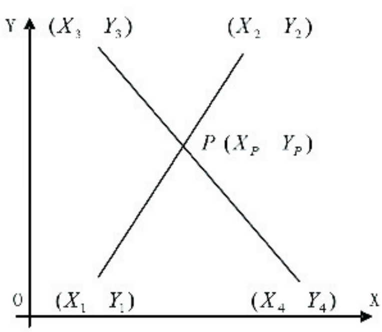

图 1 计算两条直线交点的坐标

$$A_1X+B_1Y+C_1=0$$
$$A_2X+B_2Y+C_2=0$$

然后再利用公式:

$$X_P=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}$$
$$Y_P=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$$

计算出交点 P 的坐标 X_P、Y_P[1]。用这种方式计算交点的坐标比较繁琐。

第二种方式为:

$$K_1=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$$
$$K_2=\frac{Y_4-Y_3}{X_4-X_3}$$
$$X_P=\frac{K_1X_1-K_2X_3-Y_1+Y_3}{K_1-K_2}$$
$$Y_P=K_1(X_P-X_1)+Y$$

这种方式是在解算出两条直线的斜率后,利用直线上点的坐标数据计算直线交点的坐标,比代数方式的解算简便。但当其中有一条直线平行于 Y 轴时,就会出现 $X_2-X_1=0$ 或者 $X_4-X_3=0$ 的情况,使得 K_1 或 K_2 成为无穷大∞,无法完成计算。

2 两直线交点坐标通用公式的推导

推导出一种计算两条直线交点坐标的通用公式,可以用来解算任意两条相交直线交点的坐标。

先由两点式写出直线(X_1、Y_1)、(X_2、Y_2)和直线(X_3、Y_3)、(X_4、Y_4)的方程:

$$\frac{X-X_1}{X_2-X_1}=\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1} \tag{1}$$
$$\frac{X-X_3}{X_4-X_3}=\frac{Y-Y_3}{Y_4-Y_3} \tag{2}$$

设两条直线交点 P 的坐标为(X_P、Y_P),代入(1)式和(2)式展开整理后有:

$$(Y_2-Y_1)X_P+(X_1-X_2)Y_P+(X_2Y_1-X_1Y_2)=0 \tag{3}$$
$$(Y_4-Y_3)X_P+(X_3-X_4)Y_P+(X_4Y_3-X_3Y_4)=0 \tag{4}$$

给(3)式乘以(Y_4-Y_3),给(4)式乘以(Y_2-Y_1),可得:

$$(Y_4-Y_3)(Y_2-Y_1)X_P+(Y_4-Y_3)(X_1-X_2)Y_P+(Y_4-Y_3)(X_2Y_1-X_1Y_2)=0 \tag{5}$$
$$(Y_2-Y_1)(Y_4-Y_3)X_P+(Y_2-Y_1)(X_3-X_4)Y_P+(Y_2-Y_1)(X_4Y_3-X_3Y_4)=0 \tag{6}$$

给(3)式乘以(X_3-X_4),给(4)式乘以(X_1-X_2),可得:

$$(X_3-X_4)(Y_2-Y_1)X_P+(X_3-X_4)(X_1-X_2)Y_P+(X_3-X_4)(X_2Y_1-X_1Y_2)=0 \quad (7)$$

$$(X_1-X_2)(Y_4-Y_3)X_P+(X_1-X_2)(X_3-X_4)Y_P+(X_1-X_2)(X_4Y_3-X_3Y_4)=0 \quad (8)$$

用加减消元法进行解算,由(5)式减(6)式、(7)式减(8)式后整理可得:

$$X_P=\frac{(X_1-X_2)(X_4Y_3-X_3Y_4)-(X_3-X_4)(X_2Y_1-X_1Y_2)}{(X_1-X_2)(Y_3-Y_4)-(X_3-X_4)(Y_1-Y_2)}$$

$$Y_P=\frac{(Y_1-Y_2)(X_4Y_3-X_3Y_4)-(Y_3-Y_4)(X_2Y_1-X_1Y_2)}{(X_1-X_2)(Y_3-Y_4)-(X_3-X_4)(Y_1-Y_2)} \quad (9)$$

由于两式的分母完全相同,分子的好大部分相同,也可将上式变形为:

$$M=X_4Y_3-X_3Y_4$$

$$N=X_2Y_1-X_1Y_2$$

$$T=(X_1-X_2)(Y_3-Y_4)-(X_3-X_4)(Y_1-Y_2)$$

$$X_P=\frac{M(X_1-X_2)-N(X_3-X_4)}{T}$$

$$Y_P=\frac{M(Y_1-Y_2)-N(Y_3-Y_4)}{T} \quad (10)$$

无论交点是在四个坐标点之间还是在它们的延长线上,用上式都能计算出结果。如果用编程计算器,由(9)式或(10)式可迅速计算出结果。

目前的普通计算器上,常有 A、B、C、D、E、F、X、Y 等储存键。计算时,可以先把已知坐标 X_1、Y_1、X_2、Y_2、X_3、Y_3、X_4、Y_4 的数值存入对应字母中,由 ALPHA 键调取相应字母,组成下面的表达式:

$[(A-C)(XF-EY)-(E-X)(CB-AD)]\div[(A-C)(F-Y)-(E-X)(B-D)]$

即可计算出交点的纵坐标值(X_P)。

然后,利用重演功能,把上面的表达式修改为:

$[(B-D)(XF-EY)-(F-Y)(CB-AD)]\div[(A-C)(F-Y)-(E-X)(B-D)]$

即可计算出交点的横坐标值(Y_P)。

3　算例

已知第一条直线上两点的坐标为(100,100)、(100,800),第二条直线上两点的坐标为(600,200)、(500,400)。计算这两条直线交点的坐标。

此例用第一种方式计算时,首先需要列出两条直线方程式,然后才能根据公式进行计算,比较繁琐,不利于实际应用。

此例用第二种方式计算时,因出现了分母为零的情况,无法得到结果。

推导出的通用公式,很快可计算结果为:$X_P=100$,$Y_P=1200$。

4　结束语

以往计算两条直线交点坐标的方法,要列出直线的数学方程式或者求出直线的斜率,才能用相应公式计算出交点的坐标,计算比较复杂,某些情况下还会出现数学错误而得不出结果。本研究推导出的计算两直线交点坐标的通用公式,使得计算两条直线交点坐标的工作变得简单方便,具有实际应用价值。

参考文献:

[1]　数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1979.